9 класс

1. Про числа a и b известно, что $a = b + 2024$. Может ли оказаться так, что $a^{2024} = b^{2024}$? Ответ обоснуйте.

Ответ. Может: $a = 1012$ и $b = -1012$.

Решение. Если числа a и b удовлетворяют равенству $a^{2024} = b^{2024}$, то $a = b$ либо $a = -b$. Первый случай невозможен, так как $a > b$. Если $a = -b$, то из условия задачи получаем $2a = 2024$, откуда $a = 1012$ и $b = -1012$.

2. Найдите квадратный трёхчлен $f(x)$ с *целыми* коэффициентами, такой, что будет выполнено равенство

$$f(2024) = 2025.$$

Ответ. Например, $f(x) = x^2 - 2023x + 1$.

Решение. Например, условию задачи удовлетворяет квадратный трёхчлен вида

$$f(x) = x(x - 2023) + 1,$$

то есть

$$f(x) = x^2 - 2023x + 1.$$

3. Витя и Боря вычеркивают по очереди числа из таблицы

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Витя вычеркнул 4 числа, и Боря тоже вычеркнул 4 числа. Оказалось, что сумма чисел, вычеркнутых Борей, в 3 раза меньше суммы чисел, вычеркнутых Витей. Какое число осталось в таблице? Ответ обоснуйте.

Ответ. Число 5.

Решение. Если обозначить сумму чисел, вычеркнутых Борей, через x, получится, что сумма чисел, вычеркнутых обоими, равна $4x$ - делится на 4. Поскольку сумма всех данных 9 чисел равна 45, могло остаться либо число 1, либо число 5, либо число 9.

Если осталось число 1, сумма оставшихся чисел равна 44, тогда Боря вычеркнул 4 числа, дающих в сумме 11, что невозможно (даже меньшие из оставшихся чисел (2; 3; 4; 5) дают в сумме больше).

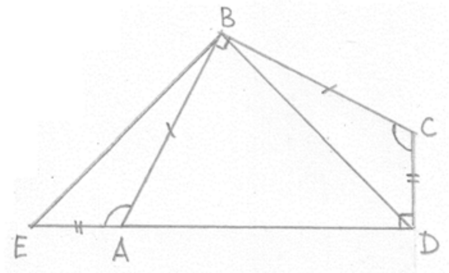
Если осталось число 5, Боря должен вычеркнуть в сумме 10, что возможно: такую сумму дают числа 1, 2, 3, 4. Тогда числа 6, 7, 8, 9 должен вычеркнуть Витя.

Если осталось число 9, Боря должен вычеркнуть в сумме 9, что невозможно.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, а $AB = BC$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если диагональ BD равна a.

Ответ. $\dfrac{a^2}{2}$.

Решение. На продолжении стороны AD за точку A отметим точку E так, что $AE=CD$ (см. рисунок). Так как в исходном четырехугольнике $\angle BAD+\angle BCD=180°$, то $\angle BAE=\angle BCD$. Следовательно, треугольники BCD и BAE равны, поэтому площадь четырехугольника $ABCD$ равна площади треугольника DBE. Из доказанного следует, что $BE=BD$ и $\angle DBE=90°$, то есть треугольник DBE является равнобедренным прямоугольным. Значит, $S_{DBE}=\frac{1}{2}BD^2=\frac{a^2}{2}$.



5. На прокладке линии электропередачи работают три бригады с постоянной производительностью. Первая и вторая бригада, работая вместе, прокладывают за месяц 15 км линии. Все три бригады вместе могут проложить за месяц линию в два раза длиннее, чем первая и третья бригады вместе. Сколько километров линии в месяц может проложить вторая бригада, если известно, что вторая бригада вместе с третьей прокладывают участок пути в четыре раза быстрее, чем его проложила бы одна третья бригада.

Ответ. 9 км.

Решение. Пусть бригады в месяц могут проложить соответственно x, y, z км. Тогда из условия следует система уравнений

$$\begin{cases} x+y=15, \\ x+y+z=2(x+z), \\ y+z=4z. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} x+y=15, \\ x+z=y, \\ 3z=y. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x=6, \\ y=9, \\ z=3. \end{cases}$$

10 класс

1. В последовательности чисел 1, *, *, *, *, *, *, *, 7 сумма любых трех соседних чисел равна 15 (звездочками обозначены числа). Найдите второй член этой последовательности (т.е. число, обозначенное первой звездочкой). Ответ обоснуйте.

Ответ. 7

Решение. Всего имеется 7 звездочек, а найти необходимо первую. Поскольку сумма трех последних чисел равна 15, а последнее число равно 7, то сумма шестой и седьмой звездочек равна 8, поэтому пятая равна 7 (так как сумма пятой, шестой и седьмой звездочек также равна 15). Далее аналогично: сумма третьей и четвертой звездочек равна 8, поэтому вторая равна 7. Поскольку сумма трех первых чисел 15, первое равно 1, а третье равно 7, второе число – первая звездочка – равно 7.

2. Даны числа a, b, c. Докажите, что хотя бы одно из уравнений

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0,\ \ x^2+(b-c)x+(c-a)=0,\ \ x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

имеет решение.

Решение. Так как $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$, то одно из слагаемых неположительно. Пусть для определенности $b-c\le 0$, тогда дискриминант первого уравнения $(a-b)^2-4(b-c)$ неотрицательный, то есть это уравнение имеет решение.

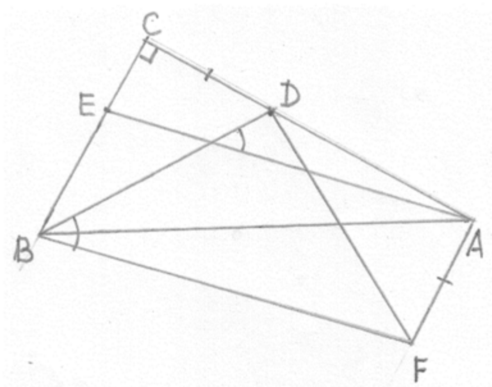
3. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отложен отрезок $AD = BC$, а на катете BC - отрезок $BE = CD$. Найдите угол между прямыми BD и AE.

Ответ. 45°.

Решение. Через вершину B треугольника ABC проведем прямую, параллельную прямой AE. Выберем на этой прямой точку F так, что $AF \parallel BC$, то есть $BEAF$ – параллелограмм (см. рисунок). Тогда угол между прямыми BD и AE будет равен углу DBF.

Заметим, что $\Delta BCD=\Delta DAF$: $BC=DA$ (по условию), $CD=BE=AF$, $\angle BCD=\angle DAF=90^\circ$ (по построению).

Тогда $BD=DF$ и $\angle BDF=90^\circ$. Следовательно, треугольник BDF – равнобедренный прямоугольный и поэтому $\angle DBF=45^\circ$.



4. Существуют ли *целые отличные от нуля* числа a, b, c, d такие, что выполнено равенство

$$a\cdot b\cdot c\cdot d=(b+c+d)\cdot(a+c+d)\cdot(a+b+d)\cdot(a+b+c)?$$

Ответ обоснуйте.

Ответ. Существуют, например, $a=-3, b=-2, c=1, d=4$.

Решение. Достаточно взять любой набор ненулевых целых чисел a, b, c, d, сумма которых равна нулю. Очевидно, такая конструкция не единственна.

5. Предприниматель приобрел в начале года некоторое количество акций банка, часть из которых – простые, а другая часть – привилегированные. За год доход по одной простой акции составил 16 условных денежных единиц, а доход по одной привилегированной акции – 21 условную денежную единицу. Сколько привилегированных акций купил предприниматель, если доход за год по купленным акциям составил 269 условных денежных единиц?

Ответ. 9 привилегированных акций.

Решение. Пусть предприниматель приобрел в начале года k акций, среди которых x привилегированных. Тогда простых акций он купил $(k-x)$ штук. Доход за год по всем акциям составил $21x + 16(k-x)$, или 269 условных денежных единиц. Составим уравнение:

$$21x + 16(k-x)=269.$$

Преобразуем полученное уравнение к виду $5x + 16k = 269$.

Так как по условию $0<x<k$, то из последнего уравнения получим $16k<5x + 16k <21k$,

То есть $21k>269$ и $16k<269$, откуда получим $13 \le k \le 16$.

Итак, предприниматель купил $x = \dfrac{269-16k}{5}$ привилегированных акций, причем $13 \le k \le 16$. Из указанного промежутка только при k=14 число $\dfrac{269-16k}{5}$ является натуральным. Таким образом, предприниматель купил $\dfrac{269-16 \cdot 14}{5} = 9$ привилегированных акций.

11 класс

1. Вычислите сумму:

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+2024^2-1^2-3^2-5^2-\cdots-2023^2.$$

Ответ. 2049300.

Решение. Преобразуя данное числовое выражение, получим:

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+2024^2-1^2-3^2-5^2-\cdots-2023^2=$$

$$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(2024^2-2023^2)=$$
$$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)(6+5)+\cdots+(2024-2023)(2024+2023)=$$
$$=3+7+11+\cdots+4047=\frac{3+4047}{2}\cdot 1012=2025\cdot 1012=2049300.$$

2. Даны *различные* квадратные трёхчлены $f(x)=x^2+ax+b$ и $g(x)=x^2+px+q$. Известно, что

$$f(1)+f(10)+f(100)=g(1)+g(10)+g(100).$$

Найдите все значения *x*, при которых выполняется равенство

$$f(x)=g(x).$$

Ответ. $x=37$.

Решение. Из условия сразу же следует, что

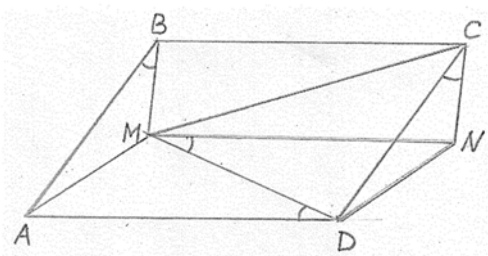
$$111a+3b=111p+3q,$$

то есть

$$37a+b=37p+q.$$

Это означает, что число 37 является корнем уравнения $f(x)=g(x)$.

3. Внутри параллелограмма *ABCD* взята точка *M* такая, что $\angle ABM=\angle MDA$. Докажите, что $\angle BMA+\angle CMD=180^\circ$.



Решение. Построим треугольник *CND*, равный треугольнику *BMA*, как показано на рисунке (*CN* || *BM*, *ND* || *MA*). Тогда *AM*=*DN*, *AM* || *DN*, следовательно, *AMND* – параллелограмм.

Так как $\angle DMN=\angle ADM=\angle ABM=\angle DCN$, то около четырехугольника *MCND* можно описать окружность. Следовательно, $\angle CND+\angle CMD=\angle BMA+\angle CMD=180^\circ$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=y,\\ \dfrac{2y^2}{y^2+1}=z,\\ \dfrac{2z^2}{z^2+1}=x.\end{cases}$$

Ответ. (0; 0; 0), (1; 1; 1).

Решение. Очевидно, что $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Так как $\frac{2t}{t^2+1} \leq 1$, то $\frac{2t^2}{t^2+1} \leq t$ при $t \geq 0$. Если исходная система имеет решение, то из первого уравнения получим $y \leq x$, а из второго и третьего соответственно $z \leq y$ и $x \leq z$.

Следовательно, получим $x \leq z \leq y \leq x$, откуда $x = y = z$. Решая уравнение $\frac{2x^2}{x^2+1} = x$, получим x=0 или x=1.

5. На строительство теплоцентрали завезли трубы двух диаметров. Узких труб меньше, чем широких. Если число узких труб увеличить вдвое, то общее количество труб окажется больше 297. Если удвоить число широких, а число узких труб оставить первоначальным, то общее количество труб будет меньше 300. Сколько завезли узких и сколько широких труб? Ответ обоснуйте.

Ответ. Количество узких труб 99, а широких – 100.

Решение. Пусть x – количество узких, y – количество широких труб. Тогда числа x и y – целые неотрицательные. Из условия задачи получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x < y, \\ 2x + y > 297, \\ x + 2y < 300. \end{cases}$$

Из первого и третьего неравенств получаем

$$3x < x + 2y < 300,$$

откуда $x < 100$.

Аналогично, из первого и второго неравенств следует

$$3y > 2x + y > 297,$$

т.е. $y > 99$.

С другой стороны, складывая почленно неравенства $297 < 2x + y$ и $x + 2y < 300$, получим

$$297 + x + 2y < 2x + y + 300,$$

откуда получаем $y < x + 3$.

С учетом ранее полученных неравенств, получим

$$99 < y < x + 3 < 103.$$

Так как числа x и y – целые неотрицательные, то $98 \leq x \leq 99$ и $100 \leq y \leq 101$.

Если $x = 98$, то $y = 100$, что не удовлетворяет исходной системе. Если $x = 99$, то $y = 100$ или $y = 101$. Пара $x = 99$ и $y = 100$ удовлетворяет условию задачи, а $x = 99$ и $y = 101$ – нет.

Таким образом, количество узких труб 99, а широких – 100.